Kurt Gödel

La prova matematica dell'esistenza di Dio

a cura di Ballo Daniele

Assioma 1. $P(\varphi) . P(\psi) \supset P(\varphi . \psi)$.

Assioma 2. $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$.

Definizione 1. $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$. (Dio)

Definizione 2. $\varphi \text{Ess.}\, x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset$
$\supset \psi(y)]]$. (Essenza di x)

$$p \supset_N q = N(p \supset q).$$
Necessità

Assioma 3. $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$
$\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$

Teorema. $G(x) \supset G \text{ Ess.}\, x$.

Definizione. $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi \text{ Ess.}\, x \supset N(\exists x)\varphi(x)]$.
(Esistenza necessaria)

Assioma 4. $P(E)$.

Teorema. $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$,

quindi $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$;

quindi $M(\exists x)G(x) \supset M\,N(\exists y)G(y)$. ($M$ = possibilità)

$M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$.

$M(\exists x)G(x)$ significa che il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile. Ciò è vero grazie a:

Assioma 5. $P(\varphi) . \varphi \supset_N \psi : \supset P(\psi)$, che implica

$$\begin{cases} x = x & \text{è positivo} \\ x \neq x & \text{è negativo.} \end{cases}$$

Introduzione

Biografia:

Gödel nasce in Moravia, secondo figlio di Rudolf August e Marianne Handschuh, all'interno di una famiglia di lingua tedesca operante con l'industria tessile, nella città allora chiamata Brünn, sotto l'impero austro-ungarico. Il padre aveva svolto studi commerciali e grazie ad una grande applicazione nel lavoro riesce a raggiungere il grado di dirigente e comproprietario di un'importante azienda locale. Grazie al benessere acquisito, è in grado di mandare i propri figli in una scuola privata tedesca. Sin da giovane Gödel mostra alcuni aspetti della personalità che lo contraddistingueranno per tutta la vita, cioè una curiosità insaziabile, una brillantezza negli studi, una preponderante introversione e una cagionevole salute; all'età di otto anni si ammala di una febbre reumatica, che suscitò in lui una eccessiva preoccupazione sia per la sua salute (ipocondria), sia per i pericoli insiti negli alimenti.

Nel 1918 diventa cittadino cecoslovacco. Nel 1924 si iscrive all'Università di Vienna, prima con l'intenzione di studiare fisica teorica, poi occupandosi di matematica e filosofia. Frequenta il Circolo di Vienna fondato dal filosofo Moritz Schlickimpregnato dall'opera di Ludwig Wittgenstein, entra in contatto con il filosofo della scienza Rudolf Carnap con il quale condivide la passione per la parapsicologia, studia Bertrand Russell, segue una conferenza di David Hilbert sopra le questioni di completezza e consistenza dei sistemi matematici tenuta al congresso internazionale di Bologna nel 1928.

Concentra quindi i suoi interessi sulla logica matematica e nel 1929, dopo essere diventato cittadino austriaco, ottiene il dottorato con una dissertazione di cui è supervisore Hans Hahn e con la quale dimostra la completezza del calcolo dei predicati del primo ordine, rispondendo positivamente alla domanda se è possibile dimostrare tutti gli enunciati veri per ogni interpretazione dei simboli.

Nel 1933, invitato da John von Neumann e Oswald Veblen, si trasferisce negli Stati Uniti, dove per un anno è membro visitatore dell'*Institute for Advanced Study* (IAS) di Princeton, divulgando il suo teorema di incompletezza.
Sia durante la sua permanenza in America sia nei suoi soggiorni viennesi, in questi anni, soffre di vari esaurimenti nervosi che si manifestano in una forma di ipocondria, in una ossessione per la dieta e per i ritmi intestinali, e per una fobia sugli avvelenamenti alimentari, che lo trascinerà a evitare il cibo fino ad arrivare alla denutrizione.

Nel 1936 resta profondamente colpito dall'uccisione di Moritz Schlick per mano di uno studente nazista ed ha una nuova crisi nervosa. Successivamente trascorre un anno negli USA dove stringe amicizia con Albert Einstein. Nel settembre del1938 sposa Adele Porkert, ballerina viennese incontrata in un locale notturno, sei anni più anziana, cattolica già divorziata, che ha sostenuto e aiutato Gödel fino all'ultimo dei suoi giorni. Nello stesso anno, in seguito all'annessione nazista dell'Austria, diventa automaticamente cittadino della Germania. Nel 1940, in seguito all'abolizione del titolo di *Privatdozent*, teme di essere chiamato alle armi e si trasferisce negli Stati Uniti passando per la Russia (servendosi della ferrovia transiberiana) e il Giappone. Quando arriva in USA i transfughi gli chiedono notizie della Germania nazista.
Risponde: «Il caffè è cattivo».

Torna nuovamente all'*Institute for Advanced Study*, dove rimarrà fino alla fine della sua vita. Dell'IAS diventa membro permanente nel 1946, professore ordinario nel1953 e professore emerito nel 1973. Dal 1948 diventa cittadino degli USA.
Frequenta tutti i giorni Einstein, che lo conduce in passeggiate e conversazioni quotidiane. L'ultimo suo articolo pubblicato risale al 1958, mentre nel 1972 riceve la laurea *honoris causa* dalla Rockefeller University e tre anni dopo la *National Medal of Science*.

Muore praticamente da suicida il 14 gennaio 1978 per inedia, cioè lasciandosi uccidere dalla fame, a causa dei disturbi ipocondriaci di cui soffriva che lo portavano a non mangiare per paura di essere avvelenato.

L’attivita ed il pensiero:

Pur pubblicando un numero ridotto di articoli, Gödel riesce ad occuparsi di quasi tutti i settori della logica moderna e l'impatto derivato dalle sue opere sarà enorme e si diffonderà anche al di fuori del mondo accademico matematico.

Gödel ha pubblicato il suo più famoso risultato nel 1931, all'età di venticinque anni, quando lavorava presso l'Università diVienna.
Tale lavoro conteneva i famosi due Teoremi di incompletezza che da lui prendono il nome, secondo i quali: ogni sistema assiomatico consistente in grado di descrivere l'aritmetica dei numeri interi è dotato di proposizioni che non possono essere dimostrate né confutate sulla base degli assiomi di partenza.
Parafrasando, se un sistema formale S è consistente (ossia privo di contraddizioni), allora è possibile costruire una formula F sintatticamente corretta ma indimostrabile in S. Per cui se un sistema formale è logicamente coerente, la sua non contraddittorietà non può essere dimostrata stando all'interno del sistema logico stesso.

I teoremi di Gödel nascevano in relazione alle ricerche volte a realizzare il programma di Hilbert, che chiedeva di trovare un linguaggio matematico che potesse provare da solo la propria consistenza o coerenza. Gödel invece dimostrò che la coerenza di un sistema è tale proprio perché non può essere dimostrata. Molti non compresero appieno il senso delle affermazioni di Gödel, ritenendo che il suo teorema avesse definitivamente distrutto la possibilità di accedere a verità matematiche di cui avere assoluta certezza. Gödel invece era convinto di non avere affatto dissolto la consistenza dei sistemi logici, da lui sempre considerati come funzioni reali dotati di pieno valore ontologico, e che anzi il suo stesso teorema di incompletezza aveva una valenza di oggettività e rigore logico. Oltretutto, egli spiegava, la presenza di un enunciato che affermi di essere indimostrabile all’interno di un sistema formale significa appunto che esso è vero, dato che non può essere effettivamente dimostrato. E proseguiva dicendo:

« *Nonostante le apparenze, non vi è nulla di circolare in un tale enunciato, dal momento che esso all'inizio asserisce l'indimostrabilità di una formula ben determinata, e solo in seguito, quasi per caso, risulta che questa formula è proprio quella che esprime questo stesso enunciato.* »

I due teoremi, il primo in particolare, furono da Gödel interpretati come una conferma del platonismo, corrente filosofica che affermava l'esistenza di formule vere non dimostrabili, e dunque l'irriducibilità della nozione di verità a quella di dimostrabilità. In accordo con questa filosofia, la sua convinzione era che la verità, essendo qualcosa di oggettivo (cioè di indipendente dalle costruzioni effettuate nelle dimostrazioni dei teoremi), non può essere posta a conclusione di alcuna sequenza dimostrativa, ma solo all'origine.

Gödel fu anche autore di un celebre lavoro sull'ipotesi del continuo, dimostrando che essa non può essere confutata dagli assiomi della teoria degli insiemi accettata, assumendo che tali assiomi siano consistenti. Tale ipotesi venne poi ampliata da Paul

Cohen il quale, illustrando come a partire dagli stessi assiomi sia indimostrabile, ne provò l'indipendenza.

Gödel vedeva nella teoria degli insiemi, e nella matematica in genere, una forma di conoscenza "reale" e non puramente astratta o concettuale, nonostante prescinda dall'esperienza dei sensi e si basi esclusivamente sull'intuizione mentale.
Similmente a Parmenide, egli concepiva la logica "formale" come unita indissolubilmente a un contenuto "sostanziale":

« *Nonostante la loro remotezza dall'esperienza dei sensi, noi abbiamo un qualcosa simile a una percezione anche degli oggetti della teoria degli insiemi, come si può vedere dal fatto che gli assiomi stessi ci forzano a considerarli veri. Non vedo motivo perché dovremmo avere una fiducia minore in questo tipo di percezione, vale a dire l'intuizione matematica, piuttosto che nella percezione sensoriale, che ci induce a costruire teorie fisiche e aspettarci che future sensazioni sensoriali si accordino ad esse [...]* »

Un altro risultato a cui giunse è la dimostrazione nel 1970 dell'esistenza di Dio, inteso come ente che assomma tutte le qualità positive di un dato insieme.
Tale teorema deriva dal concetto di ultrafiltro ed ha poco a che vedere con la teologiatradizionale, sebbene nascesse anche da esigenze di carattere esistenziale e religioso. Per comprendere la sua *Ontologischer Gottesbeweis,* ovvero la sua prova ontologica di Dio, occorre tener presente come Gödel avesse sempre avvertito l'urgenza di trovare un ordine logico-matematico da porre a fondamento dell'esistenza dell'universo. Un tale ordine gli sembrava fosse garantito solo dalla necessità logica dell’esistenza di Dio, ossia dalla dimostrazione di un Essere che assommi in sé le qualità positive di tutti gli enti reali. Come nel primo teorema di incompletezza, Dio doveva rappresentare quella Verità che non dipende da calcoli umani, ed è perciò assoluta e non relativa. Riemerge qui l’impostazione platonica di Gödel, nonché la sua forte stima per il filosofo tedesco Gottfried Leibniz, di cui riprende la prova ontologica e la definizione di Dio come la somma perfetta di «*ogni qualità semplice che sia positiva e assoluta*».

La dimostrazione gödeliana, da lui concepita come un teorema logico-formale assolutamente analogo a quelli suoi precedenti, risulta dal fatto che non è logicamente plausibile ammettere la possibilità di un unico Essere provvisto di tutte le "proprietà positive", tra cui la stessa esistenza, senza attribuirgli una realtà effettiva, perché ciò sarebbe una palese contraddizione in termini. Il passaggio dal piano razionale a quello reale avviene per l’impossibilità di salvaguardare la coerenza del discorso logico qualora si negasse a Dio un’esistenza fattuale. E conclude quindi affermando che «*Dio*

esiste necessariamente, come volevasi dimostrare».
Va inoltre sottolineato che a differenza dell'amico Albert Einstein, che concepiva Dio alla stregua di un’entità impersonale da cogliere con la sola ragione, Gödel era animato anche da sentimenti di venerazione religiosa.

La prova ontologica di Dio non fu mai resa nota dall'autore, probabilmente per timore di essere frainteso; essa rimase sconosciuta fino a quando venne pubblicata postuma negli Stati Uniti, nove anni dopo la sua morte, all'interno di una raccolta contenente altri scritti inediti appartenuti al matematico moravo.

Probabilmente la sequenza di definizioni, assiomi e teoremi sopra riportata, che rappresenta la vera e propria prova matematica dell’esistenza di Dio di Kurt Gödel, può risultare incomprensibile anche per chi il linguaggio matematico lo usa con frequenza. O per lo meno possono risultare incomprensibili alcuni simboli e quindi passassaggi del ragionamento.

Per riuscire a non perdersi in quei difficili sentieri in cui il matematico e logico si cimentò, sarà necessario avere conoscenza di una notazione (sufficiente) con cui alla fine si riuscirà a “leggere” come un semplice testo la pagina contenente la sequenza logica.

Cercheremo inoltre di dare una spiegazione razionale ad ogni definizione, assioma e implicazione che incontreremo lungo il ragionamento, evitando così interpretazioni sbagliate che possono portare a contraddizioni.

Ballo Daniele

1 - Notazione

In logica classica vale quanto segue:

Supponiamo che φ e ψ siano proposizioni.

Noi possiamo denotare la negazione di φ con $\sim\varphi$.

La disgiunzione di φ e ψ, ossia φ o ψ, viene denotata da $\varphi \vee \psi$.

La congiunzione di φ e ψ, ossia φ e ψ, viene denotata da $\varphi \,.\, \psi$.

L'implicazione di φ e ψ, ossia φ implica ψ, viene denotata da $\varphi \supset \psi$.

L'equivalenza di φ e ψ, ossia φ è equivalente a ψ, viene denotata da $\varphi \equiv \psi$.

Il quantificatore universale si designa con $\forall$ oppure (φ), (si legge : “per ogni φ”) mentre il quantificatore esistenziale con $\exists$ (si legge : “esiste”).

In logica modale si aggiungono due operatori:
l'operatore N designa la necessità, $N\varphi$ si legge : “è necessario che φ”;

l'operatore M designa la possibilità, $M\varphi$ si legge : “è possibile che φ”.

Alcune prime conseguenze dalle notazioni:

- Definizione di M in funzione di N: $N\varphi \equiv \sim M \sim \varphi$
- Regola di necessitazione: se φ è derivabile, allora $N\varphi$ è derivabile
- $$N(\varphi \supset \psi) \supset (N\varphi \supset N\psi) \qquad \text{(K)}$$

  "Se φ è necessariamente vera e da φ segue ψ in ogni circostanza, allora ψ è necessariamente vera"

- $N\varphi \supset \varphi$ (T o M)

  "Se φ è necessaria, allora è vera"

- $N\varphi \supset NN\varphi$ (S4)

  "Se φ è necessaria, allora è necessario che φ sia necessaria"

- $M\varphi \supset NM\varphi$ (S5)

  "Se φ è possibile, allora è possibile in ogni circostanza"

Alcune regole inferenziali:

Regola di necessitazione:

se φ, allora Nφ.

Modus Ponens:

se $\varphi \supset \psi$ e φ, allora ψ.

Cercheremo ora di rileggere la dimostrazione con le nozioni sopra date, così da ottenere una dimostrazione più accessibile in ermini di ragionamento e logica.

2 - Dimostrazione

La dimostrazione procede seguendo un filo logico il quale riportiamo poco sotto, successivamente andremo ad analizzare ognuno di questi passaggi:

I - Definizione di proprietà positiva P(φ)

II - Definizione di Dio G(x)

III - Definizione di relazione di essenza φ Ess.x

IV - Definizione di relazione di necessità

V - Teorema 1: Se un essere è Dio allora ha l'essenza divina

VI - Definizione di esistenza necessaria E(x)

VII - Teorema 2: Se Dio è possibile allora esiste necessariamente

VIII - Dio è possibile

IX - Dio esiste necessariamente.

I - Definizione di proprietà positiva $P(\varphi)$

$P(\varphi)$ φ è positivo (o $\varphi \in P$)

"φ è una proprietà positiva P".

Ad esempio essere onnipotente, essere giusto, essere onnisciente, essere misericordioso.

Assioma 1:

$$P(\varphi) \,.\, P(\psi) \supset P(\varphi \,.\, \psi)$$

Nota 1: vale per ogni numero di addendi

"Se φ e ψ sono proprietà positive, allora anche la congiunzione di φ e ψ è una proprietà positiva".

Ad esempio se essere onnipotente è una proprietà positiva e essere misericordioso è una proprietà positiva, allora essere onnipotente e misericordioso è una proprietà positiva.
La congiunzione di proprietà vale per un numero qualunque di addendi.
Quindi è una proprietà positiva, ad esempio, anche essere onnipotente, giusto e misericordioso.

Assioma 2:

$$P(\varphi) \lor P(\sim\varphi)$$

Nota 2: disgiunzione esclusiva

"Non è possibile che φ e $\sim\varphi$ entrambe proprietà positive o entrambe proprietà non positive".

O una proprietà è positiva o lo è il suo contrario. Se φ non è una proprietà positiva allora $\sim\varphi$ è una proprietà positiva. Se essere giusto è una proprietà positiva allora essere non giusto non può essere una proprietà positiva.

II - Definizione di Dio G(x)

Definizione 1:

$$G(x) \equiv (\varphi)\ [\ P(\varphi) \supset \varphi(x)\ ] \qquad \textbf{(Dio)}$$

"Un essere x è di natura divina se e soltanto se possiede tutte e sole le proprietà positive φ".

Dio viene definito in base alle proprietà positive. Da Dio viene esclusa ogni negazione ed ogni privazione. Le proprietà di Dio sono solo positive. Si potrebbe definire Dio dicendo che è un essere buono, giusto, onnipotente, onnisciente, misericordioso, ecc.

III - Definizione di relazione di essenza φ Ess.x

Definizione 2:

$$\varphi\ Ess.x \equiv (\psi)\ [\ \psi(x) \supset N(y)\ [\ \varphi(y) \supset \psi(y)\ ]] \qquad \textbf{(Essenza di x)}$$

Nota 3: due qualunque essenze di x sono necessariamente equivalenti

"φ è un'essenza di x (φ Ess.x) se e soltanto se per ogni proprietà ψ di x, esiste necessariamente un y, tale che se y ha la proprietà φ, allora ha la proprietà ψ".

IV - Definizione di relazione di necessità

$$p \supset Nq = N(p \supset q) \qquad \textbf{(Necessità)}$$

"Se p implica necessariamente q allora è necessario che p implichi q".

Assioma 3:

$$P(\varphi) \supset NP(\varphi)$$

"Se una proprietà è positiva allora è necessariamente positiva".

$$\sim P(\varphi) \supset N \sim P(\varphi)$$

"Se una proprietà non è positiva, allora è necessariamente non positiva".

V - Teorema 1: Se un essere è Dio allora ha l'essenza divina

Teorema:

$$G(x) \supset G \text{ Ess. } x.$$

"Se un essere x è di natura divina, allora l'essenza di x è la natura divina G".

VI - Definizione di esistenza necessaria E(x)

Definizione 3:

$$E(x) \equiv (\varphi) [\varphi \text{ Ess. } x \supset N (\exists x) \varphi(x)]$$ (**Esistenza necessaria**)

"x esiste necessariamente, se e soltanto se per ogni elemento essenziale φ di x, necessariamente esiste un x che ha φ".

Ossia "x esiste necessariamente se e soltanto se la sua essenza o ogni suo elemento essenziale esiste necessariamente".

Assioma 4:

$$P(E)$$

"L'esistenza necessaria è una proprietà positiva".

VII - Teorema 2: Se Dio è possibile allora esiste necessariamente

Teorema 2:

$$G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)$$

"Se x è Dio, allora esiste necessariamente".

Quindi

$$(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y) \qquad (12)$$

"Se Dio esiste, allora esiste necessariamente".

Necessitazione di (12) :

$$N\, [(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y)] \qquad (12.1)$$

"E' necessario che se Dio esiste, allora esiste necessariamente".

Da (12.1) e da (K) si ottiene:

$$M(\exists x)\, G(x) \supset MN(\exists y)\, G(y) \qquad (\mathbf{M = possibilit\grave{a}}) \qquad (13)$$

"Se è possibile che Dio esista, allora è possibile che Dio esista necessariamente".

Da (13) e da (S5) si ottiene:

$$MN(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y) \tag{13.1}$$

Da (13) e (13.1) si ottiene:

$$M(\exists x)\, G(x) \supset N(\exists y)\, G(y) \tag{14}$$

"Se è possibile che Dio esista, allora Dio esiste necessariamente".

VIII - Dio è possibile

$M(\exists x)\, G(x)$ significa che il sistema di tutte le proprietà positive è compatibile.

Questo è vero grazie a:

Assioma 5:

$$P(\varphi)\ .\ \varphi \supset N\psi : \supset P(\psi) \tag{15}$$

"Se una proprietà positiva φ ne implica necessariamente un'altra ψ, allora anche ψ è positiva".

Il quale implica

$$x = x \text{ è positivo} \tag{16}$$

$$x \neq x \text{ è negativo.} \tag{17}$$

Ma se un sistema S di proprietà positive fosse incompatibile, ciò significherebbe che la proprietà $\sum S$ (somma di S, la quale risulta positiva) sarebbe $x \neq x$.

Gödel usa $x \neq x$ per significare una proprietà negativa.

Per l'Assioma 1 S è positivo e vale $x = x$ per S. Ma S non può essere auto-contraddittorio con se stesso. Se qualcosa non è auto-contraddittorio, allora è possibile.
Dunque S è possibile.

IX - Dio esiste necessariamente

Da (14) e da (15) per il modus ponens:

$$N(\exists y)\, G(y) \tag{18}$$

"Dio esiste necessariamente".

Con $P(E(x)) \in G(x)$ l'esistenza necessaria di Dio è dimostrata.